Moyano

PRIMER PARCIAL ANÁLISIS MATEMÁTICO II

EJERCICIO 1: Analice la existencia de extremos del campo escalar:

$$f_{(x,y)} = xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}}$$

EJERCICIO 2: Dada $f_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{x^5}{x+y} & si \quad x+y \neq 0 \\ 0 & si \quad x+y = 0 \end{cases}$, demuestre que $f_{(x,y)}$ es derivable en toda dirección, pero no es continua en $(0,0)$.

EJERCICIO 3: Sea $F_{(x,y,z)} = e^{zx} + y - z = 0$, que define implícitamente a $z = f_{(x,y)}$. Calcule en forma aproximada $f_{(0.01,0.02)}$, utilizando el polinomio De Taylor de orden 2 de $f_{(x,y)}$.

EJERCICIO 4: Encuentre la solución general de la ecuación:

$$x.y' - y = y^2$$

Prof. Martín Moyano

AM II UTN | 1° parcial (PRIMER PARCIAL .docx) | HOJA N° | FECHA

E1 Analice la existencia de extremos del campo escalar:

$$f(x,y) = xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = y e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} + xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-x) = y e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-x^2) = 0 \quad (1) \\ f'_y(x,y) = x e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} + xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-y) = x e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-y^2) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $y \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}_{\neq 0}(1-x^2) = 0 \longrightarrow y = 0 \lor 1 - x^2 = 0 \to |x| = 1$

(2) $x \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}_{\neq 0}(1-y^2) = 0 \longrightarrow x = 0 \lor 1 - y^2 = 0 \to |y| = 1$

- (1) $\boxed{y=0} \xrightarrow{\text{en }(2)} \boxed{x=0}$ y si (2) $\boxed{x=0} \to \boxed{y=0}$ $\quad \boxed{PC_1 = (0,0)}$
- (1) $\boxed{x = 1} \xrightarrow{\text{en }(2)} y = 1 \lor y = -1$ $\quad \boxed{PC_2 = (1,1)}$ $\boxed{PC_3 = (1,-1)}$

$\boxed{x = -1} \longrightarrow |y| = 1 \to PC_4 = (-1,1)$ $\quad \boxed{PC_5 = (-1,-1)}$

Hallo el hessiano

$$f''_{xx} = y e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-x)(1-x^2) + y e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-2x) = -xy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(3-x^2)$$

$$f''_{yy} = x e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-y)(1-y^2) + x e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(-2y) = -xy\, e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(3-y^2)$$

$$f''_{xy} = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-x^2) + y e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-x^2)(-2y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}(1-x^2)(1-2y^2)$$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |H| = -1 \Rightarrow (0,0,f(0,0))$ es punto silla

$H(1,1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \to |H(1,1)| = 4e^{-2}$ y $f''_{xx} < 0 \to$ Máx rel

$H(1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \to |H(1,-1)| = 4e^{-2}$ y $f''_{xx} > 0 \to$ Mín rel

$H(-1,1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \to |H(-1,1)| = 4e^{-2}$ y $f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ Mín rel

$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \to |H(-1,-1)| = 4e^{-2}$ y $f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ Máx rel

E2 Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$ demuestre que

$f(x,y)$ es derivable en toda dirección pero no es continua en $(0,0)$

Continuidad

- $f(0,0) = 0$
- ¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x+y} \xrightarrow{\text{por } x=0} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{y} = 0$

$\xrightarrow{\text{por } y=x^5-x} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x+x^5-x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^5} = 1$

$0 \neq 1$ ∴ $\nexists \lim$

$\boxed{\nexists \lim \Rightarrow f \text{ no es cont en } (0,0)}$

Derivabilidad $\vec{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f((0,0)+(ha,hb)) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(ha,hb)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\cancel{h}} \cdot \dfrac{h^{\cancel{5}\,4} a^5}{ha+hb} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{h^{\cancel{4}\,3} a^5}^{\to 0}}{\cancel{h}(a+b)} = 0 \Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \quad \boxed{\forall \vec{v}}$

$\boxed{\text{f es derivable en toda dirección}}$

E3 Sea $F(x,y,z) = e^{zx} + y - z = 0$ que define implícitamente a $z = f(x,y)$

Calcule en forma aproximada $f(0{,}01 ; 0{,}02)$ utilizando el polinomio de Taylor de orden 2 de f x y

$F(0,0,z_0) = 0 = e^{z_0 0} + 0 - z_0 \Rightarrow z_0 = 1 = f(0,0)$

Por el T. función implícita: $f'_{x(0,0)} = -\frac{F'_{x(0,0,1)}}{F'_{z(0,0,1)}}$ y $f'_{y(0,0)} = -\frac{F'_{y(0,0)}}{F'_{z(0,0,1)}}$

$F'_x = z e^{zx} \rightarrow F'_{x(0,0,1)} = 1$

$F'_y = 1 \rightarrow \boxed{f'_{y(0,0)} = 1}$ $\quad f'_{x(x,y)} = \frac{-z e^{zx}}{-1} = \boxed{z e^{zx} = f'_x(x,y)}$

$F'_z = -1$ $\quad \boxed{f'_{x(0,0)} = 1}$

$f''_{xx} = \overset{1}{z^2} e^{zx} \rightarrow \boxed{f''_{xx(0,0)} = 1}$

$f''_{xy} = f''_{yy} = 0$

$P_2(x,y) = f_{(0,0)} + f'_x\, x + f'_y\, y + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}\, x^2 + 2 f''_{xy}\, xy + f''_{yy}\, y^2\right] =$

$= 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \times 0 + 0 \times y^2\right)$

$$\boxed{P_2(x,y) = \frac{x^2}{2} + x + y + 1}$$

$f(0{,}01 ; 0{,}02) \cong P_2(0.01 ; 0.02) = \frac{(0{,}01)^2}{2} + 0{,}01 + 0{,}02 + 1$

$$\boxed{f_{(0.01,\, 0.02)} \cong 1{,}03005}$$

$\boxed{E4}$ Encuentre la solución general de la ecuación

$$xy' - y = y^2$$

$$xy' = y^2 + y = x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2+y} = \frac{dy}{y(y+1)}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(y+1)} \longrightarrow$$

C.A.

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1)+By}{y(y+1)}$$

$$\begin{cases} y: & A+B=0 \\ \cancel{\#}: & A=1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \boxed{A=1 \Rightarrow B=-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}}$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy$$

integro m.a.m.

c, k $\in \mathbb{R}$

$$\ln(x) + c = \ln(y) - \ln(y+1) =$$
$$= \ln(y) + \ln\left[(y+1)^{-1}\right] =$$
$$= \ln(y) + \ln\left(\frac{1}{y+1}\right)$$

$$e^{\ln(x)+c} = e^{\ln(y) + \ln\left(\frac{1}{y+1}\right)}$$

$$e^{\ln(x)} e^{c} = e^{\ln(y)} e^{\ln\left(\frac{1}{y+1}\right)}$$

$$x\,k = y \cdot \frac{1}{y+1} \Rightarrow \boxed{\frac{y}{y+1} = kx}$$

NOTA